

NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-

Travail de groupe n° 4

1 heure

	Exercice 1-1.	Exercice 1-2.	Exercice 2 -1.	Exercice 2 -2.	Tenue du groupe	BONUS
Total	2	3	4	10	1	2

Exercice 1

Entourer la bonne réponse et justifier votre réponse pour chacune des questions ci-dessous :

1. Le PGCD de 720 et 210 est :

- a. 60 b. 30 c. 90 d. 15 e. 105

2. Le PGCD des nombres $2 \times 10! + 1$ et $3 \times 10! + 1$ est :

- a. aucune des autres réponses b. 1 c. 5 d. 3 e. 7

Exercice 2

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1$$

- (a) Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
 (b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

On admet qu'il existe une infinité de solutions à l'équation (1) (résultat qui serait démontré en utilisant le théorème de Gauss).

2. Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Remarque : on pourra utiliser dans cette question l'égalité $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul et tout entier a .

- (a) Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
 (b) (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels non nuls solutions de (1), montrer que l'on peut écrire :

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$$

- (c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$, puis que $10^{24} - 1$ divise $10^{24n} - 1$.
 (d) Dédire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$$

- (e) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
 (f) Dédire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

BONUS Soit a et b deux entiers premiers entre eux, avec $a < b$. On introduit les paires de nombres :

- (1) $a + b$ et $a - b$ (2) a et $a^2 + b^2$ (3) $7a + 8b$ et $6a + 7b$ (4) $2a + 3b$ et $a + 3b$

Parmi ces paires, exactement deux sont constituées d'entiers premiers entre eux quel que soit le couple (a, b) .
Il s'agit de :

- a. (1) et (3) b. (1) et (2) c. (3) et (4) d. (2) et (4) e. (2) et (3)

Après avoir entouré la bonne réponse, justifiez la.